Carlsonove[1] nejednakosti

Šefket Arslanagić[2]

Švedski matematičar *F. D. Carlson* je 1934. godine dokazao sljedeću nejednakost iz matematičke analize:

Neka je $a_1, a_2, \ldots$ *niz nenegativnih realnih brojeva koji nisu svi jednaki nuli i neka je* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 < +\infty$; $(k \in A)$. *Tada je*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)^4 < \pi^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2\right), \tag{1}$$

gdje je π^2 *najbolja moguća konstanta.*

Gornja nejednakost ima sljedeći integralni analogon:

Neka je f *nenegativna realna funkcija na* $[0, +\infty\rangle$, *koja nije identički jedmaka* 0, *takva da su* $f^2(x)$ *i* $x^2 f^2(x)$ *integrabilne funkcije na istom intervalu. Tada je*

$$\left(\int_0^{\infty} f(x)\,dx\right)^4 < \pi^2 \left(\int_0^{\infty} f^2(x)\,dx\right)\left(\int_0^{\infty} x^2 f^2(x)\,dx\right), \tag{2}$$

gdje je π^2 *najbolja moguća konstanta.*

Nejednakosti (1) i (2) nazivaju se *Carlsonove nejednakosti.*

Umjesto integralnih nejednakosti postoje i one koje se odnose na nizove, konačne i beskonačne. Iako ovo spada u višu matematiku koja se izučava na prirodoslovnim i tehničkim fakultetima, za dokaz ovih nejednakosti koristi se elementarna matematika.

Ovdje ćemo dokazati Carlsonovu nejednakost za konačan niz $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nenegativnih realnih brojeva koji nisu svi jednaki nuli na jedan zanimljiv način koji se razlikuje od onoga koga je koristio Carlson. Dakle, dokazat ćemo sljedeću nejednakost:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^4 < \pi^2 (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \ldots + n^2 a_n^2), \tag{3}$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nenegativni realni brojevi koji nisu svi jednaki nuli.

Ova nejednakost se u literaturi često naziva *druga Carlsonova nejednakost.*

Prije njenog dokaza formulirat ćemo i dokazati i *prvu Carlsonovu nejednakost* koja glasi:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^4 < \frac{\pi^2}{6}(a_1^2 + 2^2 a_2^2 + \ldots + n^2 a_n^2), \tag{4}$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nenegativni realni brojevi koji nisu svi jednaki nuli.

---

[1] F. D. Carlson (1888.–1952.), švedski matematičar

[2] Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Sarajevu;
e-pošta: asefket@pmf.unsa.ba

Dokaz. Za dokaz ove nejednakosti koristit ćemo *nejednakost Schwarz-Cauchy-Bunyakowskog*:

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\ldots+a_n)^4 &= \Big(a_1+2\cdot a_2\cdot\frac{1}{2}+\ldots+n\cdot a_n\cdot\frac{1}{n}\Big)^2\\ &\leqslant \Big(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\Big)(a_1^2+2^2a_2^2+\ldots+n^2a_n^2).\end{aligned} \tag{5}$$

Poznato je da vrijedi jednakost

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

te odavde

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{\pi^2}{6}. \tag{6}$$

Sada iz (5) i (6) dobivamo prvu Carlsonovu nejednakost (4).

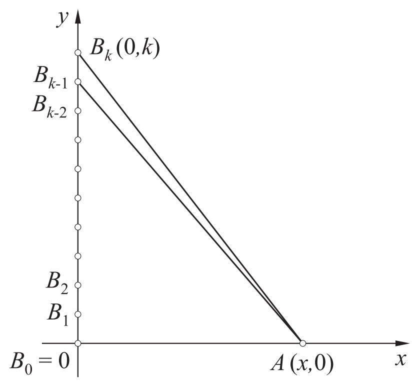
Da bi dokazali nejednakost (3), formulirat ćemo i dokazati jednu lemu.

Lema. Vrijedi nejednakost

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{x}{2^2+x^2}+\ldots+\frac{x}{n^2+x^2}<\frac{\pi}{2}, \tag{7}$$

gdje je $x>0$.

Dokaz. Koristit ćemo analitičku geometriju. Na osi Ox uzimamo točku $A(x,0)$, $(x>0)$, a na osi Oy točke $B_k(0,k)$; $k=0,1,\ldots$. Promatrajmo $\triangle B_{k-1}AB_k$ i neka je $\varphi_k=\sphericalangle B_{k-1}AB_k$, gdje $k=1,2,\ldots$. Izračunat ćemo površinu $\triangle B_{k-1}AB_k$ na dva načina:



$$P_{\triangle B_{k-1}AB_k}=\frac{1}{2}x$$

i

$$P_{\triangle B_{k-1}AB_k}=\frac{1}{2}|B_{k-1}A|\cdot|AB_k|\cdot\sin\varphi_k,$$

a odavde

$$\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}|B_{k-1}A|\cdot|AB_k|\cdot\sin\varphi_k,$$

tj.

$$x=\sqrt{(k-1)^2+x^2}\cdot\sqrt{k^2+x^2}\cdot\sin\varphi_k.$$

Sada je

$$\sin\varphi_k=\frac{x}{\sqrt{(k-1)^2+x^2}\cdot\sqrt{k^2+x^2}}>\frac{x}{k^2+x^2}. \tag{8}$$

Poznato je da vrijedi nejednakost

$$\varphi_k\geqslant\sin\varphi_k,\quad \varphi_k\in\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big] \tag{9}$$

te iz (8) i (9) imamo

$$\frac{x}{k^2+x^2}<\varphi_k,$$

tj.

$$\frac{x}{1^2+x^2} < \varphi_1; \quad \frac{x}{2^2+x^2} < \varphi_2, \ldots, \frac{x}{n^2+x^2} < \varphi_n,$$

odnosno zbog

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{1^2+x^2} + \frac{x}{2^2+x^2} + \ldots + \frac{x}{n^2+x^2} < \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n < \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

Prijeđimo sada na dokaz druge Carlsonove nejednakosti, (3).

Dokaz. Neka je x proizvoljan pozitivan broj. Opet ćemo koristiti nejednakost Schwarz-Cauchy-Bunyakowskog s tim što ćemo svako a_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ predstaviti u obliku

$$\sqrt{x + \frac{k^2}{x}} a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{x + \frac{k^2}{x}}}.$$

Sada dobivamo

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqslant \left(\frac{x}{1^2+x^2} + \frac{x}{2^2+x^2} + \ldots + \frac{x}{n^2+x^2}\right) \cdot \left(x(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) + \frac{1}{x}(a_1^2 + 2^2a_2^2 + \ldots + n^2a_n^2)\right),$$

a odavde zbog nejednakosti (7):

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqslant \frac{\pi}{2}\left(x(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) + \frac{1}{x}(a_1^2 + 2^2a_2^2 + \ldots + n^2a_n^2)\right). \tag{10}$$

Izaberimo sada x tako da vrijedi

$$x(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) = \frac{1}{x}(a_1^2 + 2^2a_2^2 + \ldots + n^2a_n^2).$$

Tada iz (10) dobivamo sljedeće dvije nejednakosti:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 < \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{x}(a_1^2 + 2^2a_2^2 + \ldots + n^2a_n^2)\right),$$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 < \frac{\pi}{2}(2x(a_1 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)).$$

Nakon množenja ove dvije, dobivamo

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^4 < \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{2}{x} \cdot 2x(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(a_1^2 + 2^2a_2^2 + \ldots + n^2a_n^2),$$

odnosno

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^4 < \pi^2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(a_1^2 + 2^2a_2^2 + \ldots + n^2a_n^2),$$

a ovo je (3), druga Carlsonova nejednakost.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag New York, 1998.

[3] D. S. Mitrinović, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.